Prof. Dr. Alfred Toth

Quadralektische Zahlenfelder

1. Für die 2-wertige aristotelische Logik gilt

$L = (0, 1)$

$L^{-1} = (1, 0)$,

denn das Gesetz des Tertium non datur verbietet die Annahme eines vermittelnden Wertes

$0 \vee \neg 0$

$1 \vee \neg 1$.

Allerdings gibt es neben der Möglichkeit eines materialen dritten Wertes die Erzeugung eines differentiellen Tertiums. Dafür benötigen wir einen Einbettungsoperator E:

$E \rightarrow L = (0, 1) =$

$$\begin{pmatrix} L_1 = (0, (1)) & L_1^{-1} = ((1), 0) \\ L_2 = ((0), 1) & L_2^{-1} = (1, (0)) \end{pmatrix}$$

Anstelle von 0 und 1 bekommen wir somit in diesem minimalen Fall

0, (0)

1, (1),

d.h. für jedes L_i gilt

$0 = f(1)$

$1 = f(0)$,

und somit ist

$(x \in 0) \subset 1$

$(y \in 1) \subset 0$,

d.h. 0 hat 1-Anteile, und 1 hat 0-Anteile. Die Werte in einer solchen Logik sind also vermöge eines differentiellen Tertiums vermittelt. In Sonderheit gilt für den Rand R

$R(0, 1) \neq R(1, 0) \neq \emptyset$,

während für L natürlich gilt

R(0, 1) = R(1, 0) = Ø (vgl. Toth 2015).

2. Wir können deshalb statt von L ausgehen von

$L^* = (0, R, 1)$

mit den Teilrelationen

$L_1^* = (0, R(0, 1), 1) = (0, (1))$ $\qquad$ $L_1^{*-1} = (R(1, 0), 1, 0) = ((1), 0)$

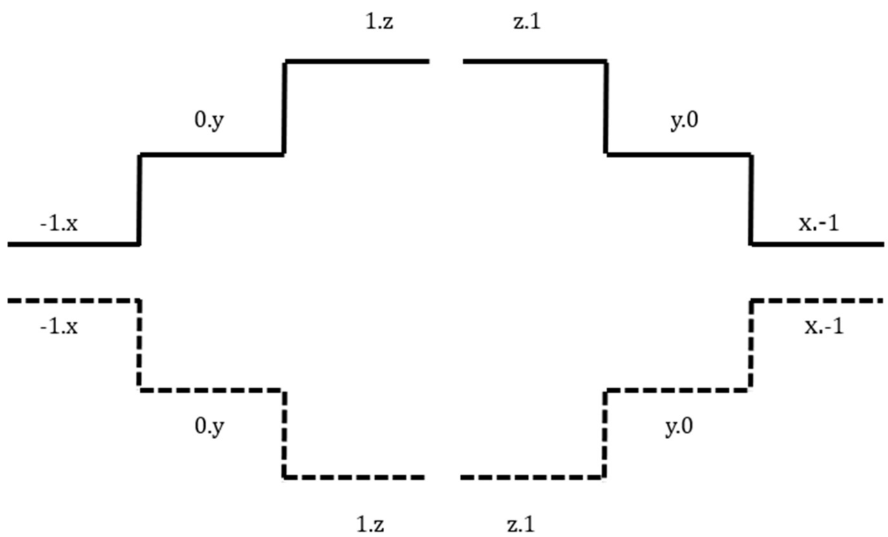
$L_2^* = (1, R(1, 0), 0) =(1, (0))$ $\qquad$ $L_2^{*-1} = (R(0, 1), 0, 1) = ((0), 1)$.

Vermöge Isomorphie (vgl. Toth 2025a) können wir dann die triadische Relation der possessiv-copossessiven Zahlen P = (-1, 0, 1) (vgl. Toth 2025b) wie L* als Quadrupel notieren

$L^*Kl^{\rightarrow} = (-1.x, 0.y, 1.z)$ $\quad$ $L^*Kl^{\rightarrow-1} = (z.1, y.0, x.-1)$

$L^*Kl^{\leftarrow} = (1.z, 0.y, -1.x)$ $\quad$ $L^*Kl^{\leftarrow-1} = (x.-1, y.0, z.1)$

und dieses Quadrupel in der Form des folgenden „quadralektischen“ (vgl. Kaehr 2011) Zahlenfeldes anordnen.



Da x, y, z ∈ P, erhalten wir ein System von $3^3 = 27$ possessiv-copossessiven Quadrupeln.

1. L*Kl-System

$L^*Kl_1^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.-1, 1.-1)$ $\qquad$ $L^*Kl_1^{\leftarrow-1} = (-1.1, -1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_1^{\rightarrow} = (1.-1, 0.-1, -1.-1)$ $\qquad$ $L^*Kl_1^{\rightarrow-1} = (-1.-1, -1.0, -1.1)$

2. L*Kl-System

$L^*Kl_2^{\leftarrow} = (-1.0, 0.-1, 1.-1)$ $\qquad$ $L^*Kl_2^{\leftarrow-1} = (-1.1, -1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_2^{\rightarrow} = (1.-1, 0.-1, -1.0)$ $L^*Kl_2^{\rightarrow-1} = (0.-1, -1.0, -1.1)$

3. L*Kl-System

$L^*Kl_3^{\leftarrow} = (-1.1, 0.-1, 1.-1)$ $L^*Kl_3^{\leftarrow-1} = (-1.1, -1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_3^{\rightarrow} = (1.-1, 0.-1, -1.1)$ $L^*Kl_3^{\rightarrow-1} = (1.-1, -1.0, -1.1)$

4. L*Kl-System

$L^*Kl_4^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.0, 1.-1)$ $L^*Kl_4^{\leftarrow-1} = (-1.1, 0.0, -1.-1)$

$L^*Kl_4^{\rightarrow} = (1.-1, 0.0, -1.-1)$ $L^*Kl_4^{\rightarrow-1} = (-1.-1, 0.0, -1.1)$

5. L*Kl-System

$L^*Kl_5^{\leftarrow} = (-1.0, 0.0, 1.-1)$ $L^*Kl_5^{\leftarrow-1} = (-1.1, 0.0, 0.-1)$

$L^*Kl_5^{\rightarrow} = (1.-1, 0.0, -1.0)$ $L^*Kl_5^{\rightarrow-1} = (0.-1, 0.0, -1.1)$

6. L*Kl-System

$L^*Kl_6^{\leftarrow} = (-1.1, 0.0, 1.-1)$ $L^*Kl_6^{\leftarrow-1} = (-1.1, 0.0, 1.-1)$

$L^*Kl_6^{\rightarrow} = (1.-1, 0.0, -1.1)$ $L^*Kl_6^{\rightarrow-1} = (1.-1, 0.0, -1.1)$

7. L*Kl-System

$L^*Kl_7^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.1, 1.-1)$ $L^*Kl_7^{\leftarrow-1} = (-1.1, 1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_7^{\rightarrow} = (1.-1, 0.1, -1.-1)$ $L^*Kl_7^{\rightarrow-1} = (-1.-1, 1.0, -1.1)$

8. L*Kl-System

$L^*Kl_8^{\leftarrow} = (-1.0, 0.1, 1.-1)$ $L^*Kl_8^{\leftarrow-1} = (-1.1, 1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_8^{\rightarrow} = (1.-1, 0.1, -1.0)$ $L^*Kl_8^{\rightarrow-1} = (0.-1, 1.0, -1.1)$

9. L*Kl-System

$L^*Kl_9^{\leftarrow} = (-1.1, 0.1, 1.-1)$ $L^*Kl_9^{\leftarrow-1} = (-1.1, 1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_9^{\rightarrow} = (1.-1, 0.1, -1.1)$ $L^*Kl_9^{\rightarrow-1} = (1.-1, 1.0, -1.1)$

---

10. L*Kl-System

$L^*Kl_{10}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.-1, 1.0)$ $L^*Kl_{10}^{\leftarrow-1} = (0.1, -1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{10}^{\rightarrow} = (1.0, 0.-1, -1.-1)$ $L^*Kl_{10}^{\rightarrow-1} = (-1.-1, -1.0, 0.1)$

11. L*Kl-System

$L^*Kl_{11}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.-1, 1.0)$ $L^*Kl_{11}^{\leftarrow-1} = (0.1, -1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{11}^{\rightarrow} = (1.0, 0.-1, -1.0)$ $L^*Kl_{11}^{\rightarrow-1} = (0.-1, -1.0, 0.1)$

12. L*Kl-System

$L^*Kl_{12}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.-1, 1.0)$ $L^*Kl_{12}^{\leftarrow-1} = (0.1, -1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{12}^{\rightarrow} = (1.0, 0.-1, -1.1)$ $L^*Kl_{12}^{\rightarrow-1} = (1.-1, -1.0, 0.1)$

13. L*Kl-System

$L^*Kl_{13}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.0, 1.0)$ $L^*Kl_{13}^{\leftarrow-1} = (0.1, 0.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{13}^{\rightarrow} = (1.0, 0.0, -1.-1)$ $L^*Kl_{13}^{\rightarrow-1} = (-1.-1, 0.0, 0.1)$

14. L*Kl-System

$L^*Kl_{14}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.0, 1.0)$ $L^*Kl_{14}^{\leftarrow-1} = (0.1, 0.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{14}^{\rightarrow} = (1.0, 0.0, -1.0)$ $L^*Kl_{14}^{\rightarrow-1} = (0.-1, 0.0, 0.1)$

15. L*Kl-System

$L^*Kl_{15}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.0, 1.0)$ $L^*Kl_{15}^{\leftarrow-1} = (0.1, 0.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{15}^{\rightarrow} = (1.0, 0.0, -1.1)$ $L^*Kl_{15}^{\rightarrow-1} = (1.-1, 0.0, 0.1)$

16. L*Kl-System

$L^*Kl_{16}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.1, 1.0)$ $L^*Kl_{16}^{\leftarrow-1} = (0.1, 1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{16}^{\rightarrow} = (1.0, 0.1, -1.-1)$ $L^*Kl_{16}^{\rightarrow-1} = (-1.-1, 1.0, 0.1)$

17. L*Kl-System

$L^*Kl_{17}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.1, 1.0)$ $L^*Kl_{17}^{\leftarrow-1} = (0.1, 1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{17}^{\rightarrow} = (1.0, 0.1, -1.0)$ $L^*Kl_{17}^{\rightarrow-1} = (0.-1, 1.0, 0.1)$

18. L*Kl-System

$L^*Kl_{18}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.1, 1.0)$ $L^*Kl_{18}^{\leftarrow-1} = (0.1, 1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{18}^{\rightarrow} = (1.0, 0.1, -1.1)$ $L^*Kl_{18}^{\rightarrow-1} = (1.-1, 1.0, 0.1)$

---

19. L*Kl-System

$L^*Kl_{19}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.-1, 1.1)$ $L^*Kl_{19}^{\leftarrow-1} = (1.1, -1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{19}^{\rightarrow} = (1.1, 0.-1, -1.-1)$ $L^*Kl_{19}^{\rightarrow -1} = (-1.-1, -1.0, 1.1)$

20. L*Kl-System

$L^*Kl_{20}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.-1, 1.1)$ $L^*Kl_{20}^{\leftarrow -1} = (1.1, -1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{20}^{\rightarrow} = (1.1, 0.-1, -1.0)$ $L^*Kl_{20}^{\rightarrow -1} = (0.-1, -1.0, 1.1)$

21. L*Kl-System

$L^*Kl_{21}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.-1, 1.1)$ $L^*Kl_{21}^{\leftarrow -1} = (1.1, -1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{21}^{\rightarrow} = (1.1, 0.-1, -1.1)$ $L^*Kl_{21}^{\rightarrow -1} = (1.-1, -1.0, 1.1)$

22. L*Kl-System

$L^*Kl_{22}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.0, 1.1)$ $L^*Kl_{22}^{\leftarrow -1} = (1.1, 0.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{22}^{\rightarrow} = (1.1, 0.0, -1.-1)$ $L^*Kl_{22}^{\rightarrow -1} = (-1.-1, 0.0, 1.1)$

23. L*Kl-System

$L^*Kl_{23}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.0, 1.1)$ $L^*Kl_{23}^{\leftarrow -1} = (1.1, 0.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{23}^{\rightarrow} = (1.1, 0.0, -1.0)$ $L^*Kl_{23}^{\rightarrow -1} = (0.-1, 0.0, 1.1)$

24. L*Kl-System

$L^*Kl_{24}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.0, 1.1)$ $L^*Kl_{24}^{\leftarrow -1} = (1.1, 0.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{24}^{\rightarrow} = (1.1, 0.0, -1.1)$ $L^*Kl_{24}^{\rightarrow -1} = (1.-1, 0.0, 1.1)$

25. L*Kl-System

$L^*Kl_{25}^{\leftarrow} = (-1.-1, 0.1, 1.1)$ $L^*Kl_{25}^{\leftarrow -1} = (1.1, 1.0, -1.-1)$

$L^*Kl_{25}^{\rightarrow} = (1.1, 0.1, -1.-1)$ $L^*Kl_{25}^{\rightarrow -1} = (-1.-1, 1.0, 1.1)$

26. L*Kl-System

$L^*Kl_{26}^{\leftarrow} = (-1.0, 0.1, 1.1)$ $L^*Kl_{26}^{\leftarrow -1} = (1.1, 1.0, 0.-1)$

$L^*Kl_{26}^{\rightarrow} = (1.1, 0.1, -1.0)$ $L^*Kl_{26}^{\rightarrow -1} = (0.-1, 1.0, 1.1)$

27. L*Kl-System

$L^*Kl_{27}^{\leftarrow} = (-1.1, 0.1, 1.1)$ $L^*Kl_{27}^{\leftarrow -1} = (1.1, 1.0, 1.-1)$

$L^*Kl_{27}^{\rightarrow} = (1.1, 0.1, -1.1)$ $L^*Kl_{27}^{\rightarrow -1} = (1.-1, 1.0, 1.1)$

Diese Quadrupel sind nun echte quadralektische Relationen, insofern sie alle logischen Positionen des Tetralemmas und damit die definitorischen Anforderungen an die von Kaehr entdeckten Diamanten (diamonds) erfüllen (vgl.

Kaehr 2007). Im einzelnen gilt für jede quadralektische Relation das logische Positionsschema

$$\begin{pmatrix} a & \neg a \\ a \wedge \neg a & \neg a \wedge \neg a \end{pmatrix}$$

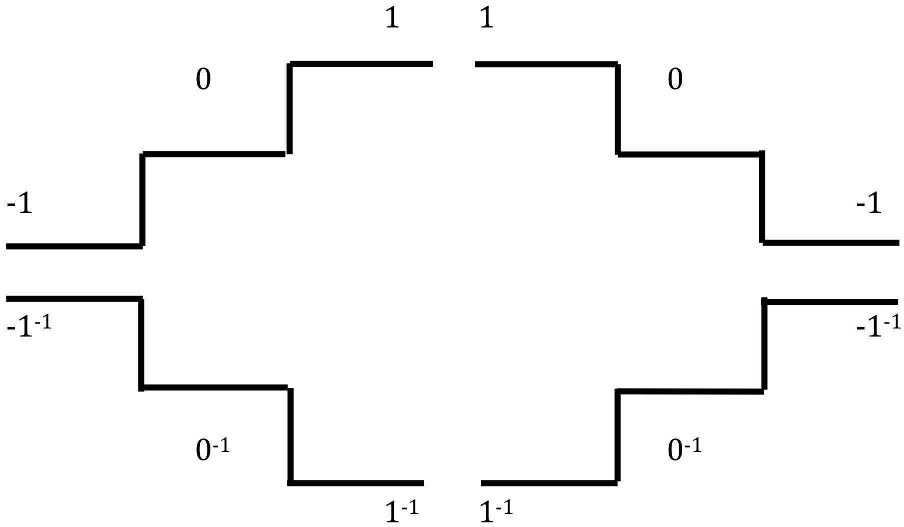
$$\begin{array}{ccc} & a \wedge \neg a & \\ a & | & \neg a \\ & \neg a \wedge \neg a & \end{array}$$

3. Wie verhält sich nun aber das oben neu eingeführte Zahlenfeld zu den bisher behandelten (vgl. zuletzt Toth 2025a)? Wir waren ja ursprünglich ausgegangen von

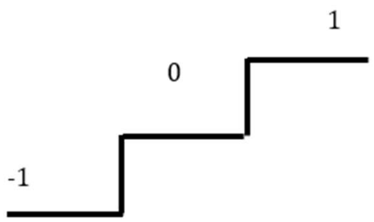
$T = (PC^2, CP^2)$

Typen-Diagramm und Zahlenfeld

$$\begin{array}{ccc} PC & — & CP \\ | & & | \\ CP & — & PC \end{array}$$



darin also die P-Relationen direkt mit den possessiv-copossessiven Teilrelationen PC und CP identifiziert wurden. Die PC-Teilrelation



weist nun zwar offensichtlich eine ontotopologische PC-Struktur auf, stellt aber im Grunde einfach eine triadische Relation als „Relation über Relationen“ (vgl. Bense 1979, S. 53) dar. Dasselbe gilt natürlich für die als CP-Relation interpretierbare duale Relation. Es empfiehlt sich daher, die drei possessiv-copossessiven Teilrelationen PP, PC und CP nicht vorab ins Zahlenfeldmodell zu integrieren, sondern sie sekundär durch Operatoren zu definieren:

$o^{PP\rightarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (-1.x, 0.y, 1.z)$ (Normalformoperator)

$o^{PP\leftarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (z.1, y.0, x.-1)$

$o^{PC\rightarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (-1.x, 1.z, 0.y)$

$o^{PC\leftarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (y.0, z.1, x.-1)$

$o^{CP\rightarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (0.y, -1.x, 1.z)$

$o^{CP\leftarrow}(-1.x, 0.y, 1.z) = (z.1, x.-1, y.0)$,

Literatur

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. In: https://www.vordenker.de/rk/rk_Diamond-Theory_collection-of-papers-and-fragments_2007.pdf

Kaehr, Rudolf, Quadralectic Diamonds: Four-Foldness of beginnings. Semiotic Studies with Toth's Theory of the Night. In: www.vordenker.de/rk/rk_Quadralectic-Diamonds_Four-Foldness-of-beginnings_2011.pdf

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Toth, Alfred, Zur Operationalisierung der Theorie der Colinearität auf der Basis der possessiv-copossessiven Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025a

Toth, Alfred, Strukturtheorie possessiv-copossessiver Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025b

27.2.2025